MECANIQUE DU SOLIDE

Dynamique en translation – Cinématique du point

EXERCICE 1

On considère une voiture de masse $m = 956\ kg$ en phase d'accélération. Avec un accéléromètre embarqué, on mesure $a = 2\ m \cdot s^{-2}$. Calculer en N la force de propulsion F que les roues motrices ont engendré (on négligera la perte de masse due à la consommation du carburant ainsi que la résistance de l'air).

L'énoncé évoque une masse (constante), une accélération et une force ; la mise en relation de ces trois grandeurs se fait avec le Principe Fondamentale de la Dynamique (PFD).

PFD : (théorème de la résultante dynamique uniquement)

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \times \overrightarrow{a_G}$$

Comme tout se passe sur un seul axe, celui du déplacement de la voiture, l'écriture vectorielle n'est pas utile et on se limitera à une équation algébrique sur l'axe du déplacement :

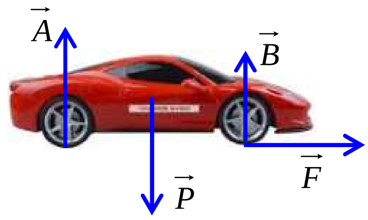
$$\sum F_{ext} = m \times a_G$$

a_G *est l'accélération du centre de gravité* G *de la voiture ; on écrira ici plus simplement* a *:*

$$\sum F_{ext} = m \times a$$

Concernant le membre de gauche, il s'agit de la somme des forces (issue du Bilan des Actions Mécaniques Extérieures, le « BAME »). A regarder les choses de près, c'est-à-dire faire le BAME proprement, on identifie 4 forces appliquées à la voiture :

- *son poids propre, vertical vers le bas,*
- *la réaction du sol sur l'essieu avant, verticale vers le haut*
- *la réaction du sol sur l'essieu arrière, verticale vers le haut*
- *la force de propulsion qu'on nous demande de trouver*



Mais, on le voit, seule la force $\vec{F}$ *agit sur l'axe de déplacement de la voiture ; ce faisant, puisqu'on écrit le PFD uniquement sur cet axe, on a tout simplement :*

$$\begin{aligned} F &= m \times a \\ &= 956 \times 2 \\ F &= 1912\ N \end{aligned}$$

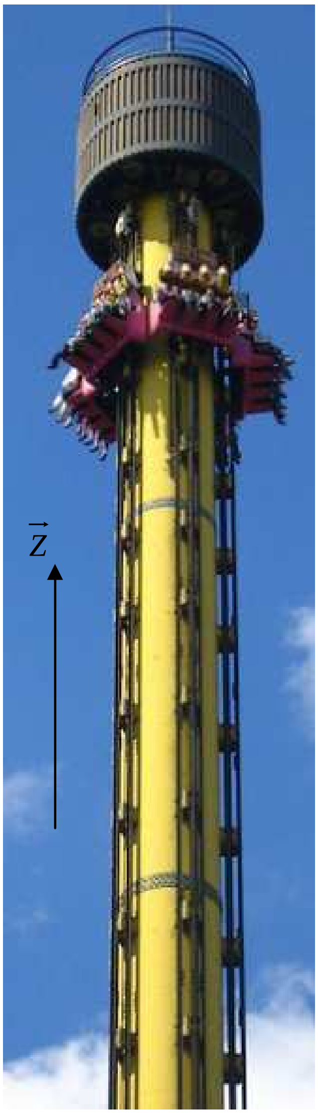
EXERCICE 2

On considère une voiture de masse $m = 1230\ kg$; les roues motrices génèrent une force de propulsion $F = 1500\ N$. Calculer en $m \cdot s^{-2}$ l'accélération a que subit la voiture (on négligera la perte de masse due à la consommation du carburant ainsi que la résistance de l'air).

Moyennant des explications de même nature que celles fournies à l'exercice précédent, on écrit :

$$F = m \times a \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{F}{m} = \frac{1500}{1230} = \underline{1{,}22\, m \cdot s^{-2}}$$

EXERCICE 3



On considère le manège ci-contre dans lequel les gens, installés dans une nacelle, se déplacent sur la verticale. La nacelle peut s'élever à une hauteur $H = 36\ m$ et contient au maximum 20 personnes de masse unitaire $m_u = 100\ kg$. La nacelle a une masse à vide $m_n = 350\ kg$. L'installation est sur terre avec $g = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$.

On isole le système {nacelle + passagers}.

a) Calculer en N le poids P du système isolé.

Masse du système isolé : $M = 20 \times m_u + m_n = 20 \times 100 + 350 = 2350\, kg$

Poids du système isolé : $P = M \cdot g = 2350 \times 9{,}81 = \underline{23054\, N}$

On applique sur le système isolé une poussée verticale ascendante $F = 34000\ N$.

b) Faire le BAME.

Le système isolé est soumis à 2 forces :

- *son poids propre $\vec{P}$, vertical vers le bas.*
- *La poussée $\vec{F}$, verticale vers le haut.*

$$\vec{P}\left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -23054 \end{array}\right. \qquad \vec{F}\left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 32000 \end{array}\right.$$

c) Appliquer le PFD et calculer l'accélération que subit le système isolé.

L'équation de projection du PFD sur l'axe verticale est suffisante :

$$\sum F = m \times a$$
$$-23054 + 34000 = 2350 \times a$$
$$\underline{a = 4{,}66\ m \cdot s^{-2}}$$

d) En déduire l'équation de vitesse $v_1(t)$ en considérant une vitesse initiale nulle : $v_1(0)=0$.

La dynamique (le PFD) a permis de trouver l'accélération connaissant les forces appliquées et la masse dy système. Maintenant qu'on connaît l'accélération, on nous demande la vitesse ; ça, c'est un problème de cinématique.

L'accélération calculée précédemment est constante ; on a donc ici un Mouvement Rectiligne Uniformément Accéléré (MRUA ; on dit aussi MRUV pour « uniformément varié », c'est pareil).

Ainsi l'équation de la vitesse est : (primitive de l'accélération)

$v_1(t)=a\cdot t+v_0$ *avec :* $a=4{,}66\ m\cdot s^{-2}$, t *la variable (le temps qui passe) et* v_0 *la constante d'intégration.*

Soit : $v_1(t)=4{,}66\cdot t+v_0$

Pour trouver la constante v_0, *il faut utiliser le fait que la vitesse initiale est nulle :*

$$v_1(0)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 0=4{,}66\times 0+v_0 \quad\Leftrightarrow\quad v_0=0$$

L'équation de la vitesse est donc :

$$\underline{v_1(t)=4{,}66\cdot t}$$

e) En déduire l'équation de position $h_1(t)$ en considérant une position initiale nulle : $h_1(0)=0$ (la nacelle est au sol).

Pour le MRUA, l'équation de la position est : (primitive de la vitesse)

$$h_1(t)=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2+v_0\cdot t+h_0$$

Comme $a=4{,}66\ m\cdot s^{-2}$ *et* $v_0=0$, *on a :*

$$h_1(t)=2{,}33\cdot t^2+h_0$$

Pour trouver la constante h_0, *il faut utiliser le fait que la position initiale est nulle :*

$$h_1(0)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 0=2{,}33\times 0^2+h_0 \quad\Leftrightarrow\quad h_0=0$$

L'équation de la position est donc :

$$\underline{h_1(t)=2{,}33\cdot t^2}$$

f) Calculer en s le temps t_1 nécessaire pour parcourir les deux tiers de la hauteur totale.

La hauteur totale est $H=36\ m$;

les deux tiers du trajet correspondent donc à $H_1=2\cdot H/3=2\times 36/3=24\,m$

Comme on donne ici une condition en position, on utilise l'équation de position :

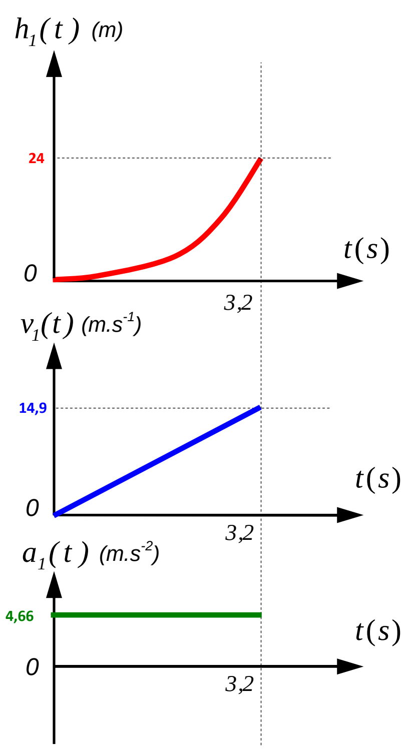
$$h_1(t)=2336\cdot t^2 \quad\Leftrightarrow\quad t=\sqrt{\frac{H_1}{2{,}33}}=\sqrt{\frac{24}{2{,}33}}=\underline{3{,}2\ s}$$

g) Calculer en $m \cdot s^{-1}$ la vitesse du système à la date t_1.

Tout bête ; on prend l'équation de la vitesse :

$$v_1(3{,}2) = 4{,}66 \cdot t = 4{,}66 \times 3{,}2 = \underline{14{,}9\ m \cdot s^{-1}}$$

h) Tracer le graphe des positions, vitesses et accélérations.



Polynôme de degré 2

Polynôme de degré 1

Polynôme de degré 0